

Bemerkungen zu einer Arbeit von Collatz über Fehlerabschätzung mit unendlichem Grundgebiet¹

RAY REDHEFFER

*Department of Mathematics, University of California, Los Angeles, California 90024 and
Mathematisches Institut I, Universität Karlsruhe (TH), Postfach 6389,
D-7500 Karlsruhe, West Germany BRD*

Communicated by Lothar Collatz

Received February 10, 1976

1. BEZEICHNUNGEN

Es sei B ein offener Bereich im reellen Euklidischen Raum E_n mit Rand ∂B und abgeschlossener Hülle $\bar{B} = B \cup \partial B$. Wir setzen voraus, daß das Komplement $E_n \setminus \bar{B}$ beschränkt ist und den Nullpunkt $x = 0$ enthält. Es gibt daher zwei Konstanten $r_0, r_1, 0 < r_0 < r_1$, derart, daß

$$|x| \leq r_0 \Rightarrow x \notin \bar{B}, \quad |x| \geq r_1 \Rightarrow x \in B.$$

Die Funktionen u, v, y seien in \bar{B} stetig und in B zweimal differenzierbar, d.h.

$$u, v, y \in C^0(\bar{B}) \cap D^2(B).$$

Die innere Normale wird mit ν und die Ableitung in Richtung der Normalen im Sinn von Walter mit u_ν bezeichnet. Wir setzen auch

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$u' = \text{Vektor } \frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad u'' = \text{Matrix } \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$$

und analog bei v und y .

Es seien Funktionen p, q, a, b, c durch

$$p: \partial B \rightarrow E^1, \quad q: \partial B \rightarrow E^1, \quad a: B \rightarrow S^n, \quad b: B \rightarrow E^n, \quad c: B \rightarrow E^1$$

gekennzeichnet, wobei S^n die Menge der reellen symmetrischen $n \times n$ -Matrizen ist. Das Skalarprodukt zweier Vektoren derselben Dimension wird durch Zusammensetzung geschrieben, insbesondere ist

$$bu' = \sum b_i \frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad au'' = \sum a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \quad xax = \sum x_i a_{ij} x_j.$$

¹ Under auspices of the U.S. Special Program, Alexander von Humboldt Stiftung.

Wir setzen weiter $|x| = r$,

$$x' = \text{Einheitsmatrix}, \quad ax' = \text{Spur } a$$

und, für m konstant,

$$\tau(x, m) = pr - (m - 2)qr, \quad x \in \partial B.$$

2. DER SATZ VON COLLATZ

In [1] kommen drei verschiedene Voraussetzungen vor, und zwar folgende:

VORAUSSETZUNG C-1. Es sei R für $x \in \partial B$ durch

$$Ru = pu - qu,$$

definiert mit $p = 1$, $q \geq 0$ oder $p = 0$, $q = 1$. Falls $q \neq 0$ ist, muß außerdem B ein Sterngebiet sein, wobei v so gewählt werden muß, daß $\partial r/\partial v \geq 0$ und im Falle $p = 0$ sogar $\partial r/\partial v > 0$ für $x \in \partial B$ gilt.

VORAUSSETZUNG C-2. Es sei Q für $x \in B$ durch

$$Qu = -\Delta u - bu' - cu$$

definiert mit stetigen b und c . Weiter gelte:

$$cr^2 \geq (n - 2)bx, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} r^4b(x) \quad \text{und} \quad \lim_{r \rightarrow \infty} r^4c(x) \text{ existieren.}$$

VORAUSSETZUNG C-3. Es sei $|u(x) - v(x)| \leq o(r^{3-n})$ für $r \rightarrow \infty$.
Der folgende Satz ist in [1] bewiesen:

SATZ C (Collatz). *Es gelten die Voraussetzungen C und außerdem sei $n \geq 3$. $Qu = Qv$, $|Ru - Rv| \leq \epsilon(x)$. Dann ist*

$$|u(x) - v(x)| \leq \frac{1}{|x|^{n-2}} \sup_{x \in \partial B} \frac{\epsilon(x)}{\tau(x, n)} |x|^{n-1}, \quad x \in \bar{B}.$$

Dieser Satz ist aus verschiedenen Gründen interessant. Erstens: Die Fehlerabschätzung strebt mit größerer Geschwindigkeit gegen Null, als man auf Grund der Wachstumsvoraussetzung hätte erwarten können. Z.B. bei $n = 3$ ist die Voraussetzung $|u - v| = o(1)$ und das Ergebnis $|u - v| = O(1/r)$ (Satz C ist in dieser Hinsicht ein Satz von Phragmén-Lindelöfscher Art). In [1] ist ein nichttriviales Beispiel gegeben, worin eine bekannte Ansatzfunktion v die Abschätzung $|u - v| \leq 0.0066/r$ für die unbekannt Lösung u liefert.

Zweitens: Die Methode ist für die zweite Randwertaufgabe brauchbar ($p = 0, q = 1$). Auch dies wird in [1] durch ein Beispiel illustriert.

Drittens: Es wird nicht vorausgesetzt, daß $c \geq 0$ ist. Daher sind die üblichen Monotoniesätze nicht ohne weiteres anwendbar, ganz davon abgesehen, daß das Gebiet unbeschränkt ist.

Es scheint aus diesen Gründen wertvoll, den Satz von Collatz womöglich zu verallgemeinern, und das ist die Absicht dieser Arbeit. Wir wollen Δu durch au'' ersetzen und dadurch eine größere Klasse von Operatoren Q zulassen. Dabei braucht der Parameter m in $\tau(x, m)$ nicht mehr mit der Dimension n übereinzustimmen, sondern wir können bei passenden Q, R etwa $m = 3, n = 2$ zulassen. Wir wollen noch dazu die Collatzschen Bedingungen für $r^4 b$ und $r^4 c$ durch eine schwächere Bedingung ersetzen. Es stellt sich heraus, daß

$$c(x) \geq -\alpha r^{-\beta}$$

für eine Konstante α und eine Konstante $\beta > 2$ genügt; jedoch ist diese Bedingung mit $\beta = 2$ nicht ausreichend. Die Voraussetzung C-1 wird auch etwas verallgemeinert und insbesondere wird erlaubt, daß $p < 0$ ist. Zuletzt möchten wir die Wachstumsbedingung C-3 durch $|u - v| = o(1)$ ersetzen, welche für $n > 3$ et as schwächer als $|u - v| \leq o(r^{3-n})$ ausfällt.

3. EIN ABSCHÄTZUNGSSATZ

Hier werden folgende Voraussetzungen eingeführt:

VORAUSSETZUNG 1. Es sei ein Operator R für $x \in \partial B$ durch

$$Ru = pu - qu_v$$

definiert mit $q \geq 0$, und p und qr_v seien nach unten beschränkt. Weiter sei $\inf \tau(x, m) > 0$ für $x \in \partial B$.

VORAUSSETZUNG 2. Es sei ein Operator Q für $x \in B$ durch

$$Qu = -au'' + bu' + cu$$

erklärt mit $a \geq 0$ und $xa(x)x = |x|^2$. Weiter sei

$$|x|^2 c(x) \geq (m - 2)(bx - ax' + m), \quad c(x) \geq \gamma(|x|),$$

wobei $\gamma(r)$ stetig ist und

$$\int_0^\infty r |\gamma(r)| dr < \infty.$$

VORAUSSETZUNG 3. Es sei $\liminf_{r \rightarrow \infty} M(r) \leq 0$ mit

$$M(r) = \sup[u(x) - v(x)] \quad \text{für } |x| = r.$$

Der folgende Satz wird hier bewiesen:

SATZ 1. Es gelten die Voraussetzungen 1–3, und außerdem sei $m > 2$, $Qu \leq Qv$ und $Ru - Rv \leq \epsilon(x)$ mit $\epsilon \geq 0$. Dann ist

$$u(x) - v(x) \leq \frac{1}{|x|^{m-2}} \sup_{x \in \partial B} \frac{\epsilon(x)}{\tau(x, m)} |x|^{m-1}, \quad x \in \bar{B}.$$

Wir haben Satz 1 als eine einseitige Abschätzung deswegen formuliert, weil im allgemeinen die Gleichung $Qv = Qu$ für die Ansatzfunktion v schwer zu lösen ist. Durch Vertauschen von u und v folgt selbstverständlich eine Abschätzung für $|u - v|$, wenn $|u - v| = o(1)$, $Qu = Qv$ und $|Ru - Rv| \leq \epsilon$ vorausgesetzt werden.

Falls $p \geq 0$ und $qr_v \geq 0$ sind, dann kann in der Voraussetzung 1 $\inf \tau(x, m) > 0$ durch $\tau(x, m) > 0$ ersetzt werden. Das ist z.B. in Satz C mit $m = n$ der Fall.

Die Voraussetzung $xax = |x|^2$ ist eine Normierung, die immer durch Division erreichbar ist, wenn $ax \neq 0$ für $x \in B$ gilt (Wir haben uns eine ähnliche Normierung in der Formulierung von Satz C erlaubt; vergl. [1]).

4. ZUSÄTZE

Es wäre interessant zu wissen, ob $c(x)$ in gewissen Teilgebieten "sehr negativ" sein kann, wenn $c(x)$ in anderen Teilgebieten genügend groß ist. Satz 1 gibt über diese Frage wenig Auskunft, da das Integral von $r\gamma(r)$ als absolut konvergent vorausgesetzt wird. Es gilt aber folgender:

ZUSATZ 1. Es möge die Voraussetzung 2 bei Satz 1 durch $a \geq 0$, $xa(x)x = |x|^2$ und

$$|x|^2 c(x) \geq (m-2)(bx - ax' + m) \geq |x|^2 \gamma(|x|)$$

ersetzt werden, wobei das Integral

$$\int_0^r s\gamma(s) ds$$

nach unten beschränkt ist. Dann gilt die Behauptung immer noch.

Falls das Integral der stärkeren Bedingung

$$\liminf_{r \rightarrow \infty} \int_0^r s\gamma(s) ds = \infty$$

in Zusatz 1 genügt, dann läßt sich die Wachstumsvoraussetzung 3 durch die schwächere Bedingung $\liminf_{r \rightarrow \infty} M(r) < \infty$ ersetzen.

Der folgende Zusatz zeigt, daß die Bedingung über $\gamma(r)$ scharf ist:

ZUSATZ 2. *Es mögen alle Voraussetzungen über Q , u und v von Satz 1 gelten mit der einzigen Ausnahme, daß $\gamma(r) \leq 0$ und*

$$\int_0^\infty r |\gamma(r)| dr = \infty \quad \text{statt} \quad \int_0^\infty r |\gamma(r)| dr < \infty$$

vorausgesetzt wird. Dann kann man bei vorgegebenem a stets u , v , b und $c \geq \gamma$ so wählen, daß $Qu = Qv$ und $\limsup_{r \rightarrow \infty} (u - v) = \infty$ ist.

5. EIN HILFSSATZ

Satz C wird in [1] durch Inversion bewiesen. Diese Methode ist bei Satz 1 weniger günstig, da keine Sätze über hebbare Singularitäten in passender Allgemeinheit vorliegen (Man merke sich, daß a den Rang 1 bei beliebigem n haben darf und daß unsere Voraussetzungen über b und c ziemlich schwach sind). Hier wird eine andere Methode bevorzugt. Diese Methode ist dadurch motiviert, daß die Bedingungen $\tau(x, n) > 0$ und $r^2c \geq (n - 2)bx$, die in [1] aus der Inversion stammen, gleichwertig mit

$$Rr^{2-n} > 0, \quad Qr^{2-n} \geq 0$$

sind. Die Behauptung folgt deswegen aus einem einfachen Hilfssatz, der jetzt erläutert wird.

Wir setzen

$$M_y(r) = \sup_{|x|=r} \frac{u(x) - v(x)}{y(x)},$$

$$Qu = -au'' + bu' + cu, \quad Ru = pu - qu,$$

mit $a \geq 0$ und $q \geq 0$. Die anderen Voraussetzungen von §3 werden im folgenden Hilfssatz nicht benutzt.

HILFSSATZ 1. *Es sei $y > 0$, $Qy \geq 0$, $Ry \geq 0$ für $x \in \bar{B}$ bzw. $x \in B$ bzw. $x \in \partial B$. Behauptung: Aus $Qu - Qv < Qy$, $Ru - Rv < Ry$ und $\liminf_{r \rightarrow \infty} M_y(r) < 1$ folgt $u - v < y$.*

Das Ergebnis folgt aus [4], jedoch wird der kurze Beweis hier wiederholt. Man setze $u - v = wy$. Wenn die Behauptung falsch ist, dann hat w ein Maximum vom Wert $\xi \geq 1$ in einem Punkt $x^* \in \bar{B}$. Ist $x^* \in B$, dann ist dort

$$u - v = \xi y, \quad u' - v' = \xi y', \quad u'' - v'' \leq \xi y''.$$

Daraus folgt $Qu - Qv \geq \xi Qy \geq Qy$, also ein Widerspruch. Ebenfalls entsteht ein Widerspruch, wenn $x^* \in \partial B$ ist.

6. EIN EINFACHER FALL

Für zweimal differenzierbares $\mu(r)$ ist

$$Q\mu(r) = \frac{\mu'(r)}{r} (bx - ax') - r \left(\frac{\mu'(r)}{r} \right)' + c\mu(r).$$

Wir wollen μ so wählen, daß $Qu > 0$ ist. Die Voraussetzung 2 ergibt nun

$$bx - ax' \leq \frac{r^2 c}{m - 2} \cdot m \quad (m > 2).$$

Wenn $\mu'(r) \leq 0$ ist, können wir daher die gewünschte Ungleichung $Q\mu > 0$ durch

$$c \left[\mu(r) + \frac{r\mu'(r)}{m-2} \right] > m \frac{\mu'(r)}{r} + r \left(\frac{\mu'(r)}{r} \right)' \quad (1)$$

ersetzen. D.h., wenn (1) gilt mit $\mu' \leq 0$, dann gilt auch $Q\mu > 0$.

Falls $\mu(r) = r^\delta$ mit δ konstant, dann ist (1) mit

$$cr^2 \left[1 + \frac{\delta}{m-2} \right] > \delta(m + \delta - 2) \quad (2)$$

gleichbedeutend. Man merke sich, daß beide Seiten 0 für $\delta = 2 - m$ sind.

Ebenfalls ist

$$Rr^\delta = r^{\delta-1}(pr - \delta qr_v),$$

und aus $\delta = 2 - m$ folgt

$$Rr^{2-m} = r^{1-m}\tau(x, m). \quad (3)$$

Es sei nun $c(x) \geq 0$, weiter seien p nach unten und qr_v nach oben beschränkt. Wir setzen

$$y = \alpha r^\delta + \beta$$

mit

$$\alpha > \alpha_0 = \inf_{x \in \partial B} \frac{\epsilon(x)}{\tau(x, m)} \cdot x^{-m-1}, \quad \beta > 0. \quad (4)$$

Für $0 > \delta > 2 - m$ gilt (2), und daraus folgt $Qy > 0$. Für kleine β und $\delta - (2 - m)$ ist auch $Ry > \epsilon(x)$, und Hilfssatz 1 liefert

$$u(x) - v(x) \leq \alpha r^\delta + \beta.$$

Aus $\delta \rightarrow (2 - m)^+$, $\beta \rightarrow 0^+$ und $\alpha \rightarrow \alpha_0^+$ folgt die Behauptung von Satz 1.

Der wichtige Fall $Qu = -\Delta u$, $m = n$, ist in dem obigen Fall enthalten, und dabei brauchen wir weder $r, \geq 0$ noch $p \geq 0$ vorauszusetzen. Rein theoretisch gesehen jedoch liegt der Schwerpunkt des Collatzschen Ergebnisses gerade darin, daß $c < 0$ zugelassen ist. Wir wenden uns jetzt der Frage zu, wie man ein passendes y im Fall $c < 0$ finden kann.

7. EIN ZWEITER HILFSSATZ

Wir setzen

$$\mu(r) = r^{2-m} \Phi(r), \quad \Phi'(r) = \Psi(r) \quad (5)$$

und erhalten aus (1)

$$\left(\frac{cr}{m-2} - \frac{3-m}{r} \right) \Psi > \Psi'. \quad (6)$$

Aus der Voraussetzung $c(x) \geq \gamma(r)$ folgt erst recht $c(x) \geq \min[0, \gamma(r)]$. Daher können wir o.B.d.A. $\gamma \leq 0$ annehmen. Wir definieren

$$\rho(x) = \frac{r\gamma(r)}{m-2} - \frac{1}{1+r^2}$$

und bestimmen Ψ durch $\Psi'/\Psi = \rho(r) - (3-m)/r$. Eine Lösung ist

$$\Psi(r) = r^{m-3} \exp \int_{r_0}^r \rho(s) ds.$$

Nach (5) ist dann

$$\Phi(r) = \Phi(r_0) + \int_{r_0}^r \Psi(s) ds, \quad \mu(r) = r^{2-m} \Phi(r).$$

Die Bedingung $\mu' \leq 0$ ist gleichbedeutend mit $\lambda \leq 0$, wobei

$$\lambda(r) = r\Psi(r) + (2-m)\Phi(r)$$

ist. Die Wahl $(m-2)\Phi(r_0) = r_0^{m-2}$ ergibt $\lambda(r_0) = 0$, und aus

$$\lambda'(r) = r\Psi'(r) + (3-m)\Psi(r)$$

im Zusammenhang mit $\rho(r) \leq 0$ folgt $\lambda'(r) \leq 0$. Wir schließen zuerst auf $\lambda(r) \leq 0$, danach auf $\mu'(r) \leq 0$ und zuletzt auf $Q\mu > 0$ für $r > r_0$.

Wird η durch

$$(m-2)\eta = \exp \int_{r_0}^{\infty} \rho(s) ds$$

definiert, dann ist, nach der Voraussetzung 2, $\eta > 0$. Weiter ist $\Psi(r) \geq (m-2)\eta r^{m-3}$, daher auch $\Phi(r) \geq \eta(r^{m-2} - r_0^{m-2})$, und daraus folgt $\liminf \mu(x) \geq \eta$ für $r \rightarrow \infty$.

Damit haben wir folgenden

HILFSSATZ 2. *Unter der Voraussetzung 2 existiert eine Funktion $\mu(r) \in C^{(2)}$ für $r \geq r_0$ derart, daß*

$$\mu(r) > 0, \quad \mu'(r) \leq 0, \quad Q\mu(r) > 0, \quad \liminf_{r \rightarrow \infty} \mu(r) > 0.$$

8. BEWEIS VON SATZ 1

Es sei

$$y' = \alpha r^{2-m} + \beta \mu(r)$$

mit α und β wie in (4) und mit $\mu(r)$ wie in Hilfssatz 2. Dann ist nach (3)

$$Ry' = \alpha r^{1-m} \tau(x, m) + \beta R\mu(r).$$

Wegen der Voraussetzung 1 können wir bei festem $\alpha > \alpha_0$ ein $\beta > 0$ so wählen, daß $Ry' > \epsilon(x)$ ist. Aus Hilfssatz 1 folgt $u - v \leq y$, und daraus folgt Satz 1.

9. BEWEIS VON ZUSATZ 1

Wir schreiben die gewünschte Ungleichung $Q\mu > 0$ in der Form

$$(bx - ax' + m) \frac{\mu'(r)}{r} + c\mu(r) > r \frac{\mu'(r)}{r} + m \frac{\mu'(r)}{r}. \quad (7)$$

Für $\mu > 0$ können wir c durch $r^{-2}(m-2)(bx - ax' + m)$ ersetzen. D.h., wenn μ der daraus entstehenden Ungleichung

$$(bx - ax' + m) \left(\frac{\mu'(r)}{r} + \frac{m-2}{r^2} \mu(r) \right) > r \left(\frac{\mu'(r)}{r} \right)' + m \frac{\mu'(r)}{r} \quad (8)$$

genügt und außerdem $\mu > 0$ ist, dann gilt auch (7).

Aus (5) folgt

$$\frac{\mu'(r)}{r} + \frac{m-2}{r^2} \mu(r) = r^{1-m} \Psi(r).$$

Falls $\Psi(r) \geq 0$ ist, können wir $bx - ax' + m$ in (8) durch $r^2 \gamma(r)/(m-2)$ ersetzen. In diesem Fall folgt (8) aus

$$\left(\frac{r\gamma(r)}{m-2} - \frac{3-m}{r} \right) \Psi > \Psi'.$$

O.B.d.A. sei $\gamma(r) \leq 0$ für $r_0 \leq r \leq r_1$. Es werden ρ , Ψ , Φ , und μ wie in Hilfssatz 2 konstruiert, diesmal aber mit der zusätzlichen Bedingung $\mu' \leq 0$ nur für $r_0 \leq r \leq r_1$ (Die Bedingung besteht daher für $R\mu$, nicht aber für $Q\mu$).

Der Beweis von Zusatz 1 ist ähnlich dem Beweis von Satz 1.

10. BEWEIS VON ZUSATZ 2

Für stückweise stetiges $\gamma(r)$ sei eine Transformation $T: \mu = T\gamma$ durch

$$\Psi(r) = r^{m-3} \exp\left(\int_{r_0}^r \frac{s\gamma(s)}{m-2} ds\right),$$

$$\Phi(r) = \int_{r_0}^r \Psi(s) ds, \quad \mu(r) = r^{2-m}\Phi(r)$$

definiert (vergl. den Beweis von Hilfssatz 2). Diese Transformation hat die folgenden zwei Eigenschaften:

(i) Aus $\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{r_0}^r s\gamma(s) ds = -\infty$ folgt $\lim_{r \rightarrow \infty} \mu(r) = 0$.

(ii) Es sei $\gamma(r, \sigma) = \sigma$ für $s < r < s + 1$ mit σ konstant, und es sei $\gamma(r, \sigma) = \gamma(r)$ sonst. Weiter sei $\mu(r, \sigma) = T\gamma(r, \sigma)$. Dann ist

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \mu(s + 1, \sigma) = \infty.$$

Der einfache Beweis wird dem Leser überlassen.

Es sei nun $\gamma(r)$ wie im Zusatz 2. Wir setzen $\mu = T\gamma$ und finden $r_1 > r_0$ derart, daß $\mu(r_1) < 1$ ist. Auf dem Intervall $r_1 < r < r_1 + 1$ wird $\gamma(r)$ durch eine große Konstante σ_1 ersetzt. Die neue Funktion sei γ_1 , d.h.

$$\gamma_1(r) = \sigma_1 (r_1 < r < r_1 + 1), \quad \gamma_1(r) = \gamma(r) \text{ (sonst)}.$$

Wir setzen $\mu_1 = T\gamma_1$ und wählen $\sigma_1 > 0$ so, daß $\mu_1(r_1 + 1) > 1$ ausfällt.

Wir bestimmen jetzt $r_2 > r_1 + 1$ derart, daß $\mu_1(r_2) < \frac{1}{2}$ ist, und ersetzen $\gamma_1(r)$ durch eine große Konstante σ_2 auf dem Intervall $r_2 < r < r_2 + 1$. Die neue Funktion sei γ_2 , d.h.

$$\gamma_2(r) = \sigma_2 (r_2 < r < r_2 + 1), \quad \gamma_2(r) = \gamma_1(r) \text{ (sonst)}.$$

Wir setzen $\mu_2 = T\gamma_2$ und bestimmen $\sigma_2 > 0$ so, daß $\mu_2(r_2 + 1) > 2$ ist.

Durch dieses Verfahren erhalten wir eine Funktion $\gamma_0(r)$, die den Wert $\sigma_k > 0$ auf Intervallen $r_k < r < r_k + 1$ hat und die sonst mit $\gamma(r)$ übereinstimmt. Für die zugehörige Funktion $\mu_0 = T\gamma_0$ gilt

$$\mu_0(r_k) \leq 1/k, \quad \mu_0(r_k + 1) \geq k \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Aus $\sigma_k \geq 0$ folgt $\gamma_0 \geq \gamma$. Wir können γ_0 durch eine Funktion $\gamma^+ \in C^2$ so nach oben approximieren, daß $\gamma^+ \geq \gamma_0 \geq \gamma$ und daß immer noch $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu^+(r_k) = 0$ für $\mu^+ = T\gamma^+$ gilt.

Wir setzen $y(x) = \mu^+(r)$, $u - v = y$, $c(x) = \gamma^+(r)$, und bestimmen b bei vorgegebenem a so, daß

$$r^2 c(x) = (m - 2)(bx - ax' + m)$$

gilt (Wir setzen z.B. $b(x) = h(x)x$ mit einer passenden Funktion $h: E^n \rightarrow E^1$). Es ist $u - v = y \geq 0$, und für die Funktion

$$M(r) = \sup\{u(x) - v(x)\} \quad (|x| = r)$$

gilt $\liminf M(r) = 0$, $\limsup M(r) = \infty$. Weiter ist $Qy = 0$, daher $Qu = Qv$. Die Behauptung von Satz 1 gilt also nicht einmal für das erste Randwertproblem $Ru = u$ (Falls ∂B mit $|x| = r_0$ übereinstimmt, haben wir sogar $u = v$ für $x \in \partial B$).

Durch dieselbe Konstruktion können wir

$$\limsup M(r) \delta(r) = \infty$$

erhalten, wobei $\delta(r)$ eine beliebige vorgegebene positive Funktion ist.

11. BEMERKUNGEN ZUR WACHSTUMSBEDINGUNG

Wenn a und b lokal beschränkt sind, so gilt Satz 1 auch noch für $m = 2$. Das folgt aus dem schwachen Maximumprinzip, das sich unter den genannten Voraussetzungen mit Hilfe von Voraussetzung 2 im Falle $m = 2$ beweisen läßt [3].

In diesem Beispiel ist $c \geq 0$. Wenn $c \geq 0$ für $r \geq r_1$ ist, kann die Wachstumsvoraussetzung 3 manchmal durch die schwächere Bedingung

$$\liminf_{r \rightarrow \infty} M(r) < \infty$$

ersetzt werden. Das gilt z.B. nach Meyers und Serrin [2], wenn

$$ax' - bx \leq 2 + \sigma(r), \quad c \geq 0$$

gilt, wobei $\sigma(r)$ stetig ist und

$$\int_{r_1}^{\infty} \frac{1}{s} \exp\left(-\int_{r_1}^s \frac{\sigma(t)}{t} dt\right) ds = \infty$$

gilt. (Für den Beweis [2] beachte man, daß $Q\mu > 0$ aus $c \geq 0$ und

$$\mu''(r) + \frac{\mu'(r)}{r} [ax' - bx - 1] < 0, \quad \mu'(r) \geq 0$$

folgt und daß dies sich durch

$$\mu''(r) + \frac{\mu'(r)}{r} [1 + \sigma(r)] < 0, \quad \mu'(r) \geq 0 \tag{9}$$

ersetzen läßt. Man betrachtet $\alpha r^{2-m} + \beta\mu(r)$ wie früher.)

Leider ist $\mu(\infty) = \infty$ in (9) für $m > 2$ nicht möglich, da Voraussetzung 2 mit $c \geq 0$ und $m > 2$ die Bedingung $\sigma \geq m - 2$ nach sich zieht. Der folgende Zusatz ist dagegen für alle m brauchbar.

ZUSATZ 3. Für $|x| \geq r_1$ sei $a \geq 0$, $xax = |x|^2$, $c \geq 0$ und

$$c|x|^2 \geq (m - 2)(bx - ax' + m).$$

Weiter sei $c(x) \geq \eta(|x|)(ax' - bx)$ mit $\eta > 0$, $\eta' \leq 0$ und

$$\int_{r_1}^{\infty} s\eta(s) ds = \infty.$$

BEHAUPTUNG. Aus $\liminf_{r \rightarrow \infty} M(r) < \infty$ folgt $M(r) \leq 0$ für $r \geq r_1$ oder

$$M(r) r_1^{2-m} \leq M(r_1) r^{2-m}, \quad r \geq r_1.$$

Falls die Behauptung für $m > 2$ gilt, so ist $\limsup M(r) \leq 0$, und wir können Satz 1 mit $\gamma(r) = 0$ für $r \geq r_1$ anwenden. Dabei wird die Bedingung $c \geq 0$ nicht für $r < r_1$ verlangt.

Für den Beweis setze man o.B.d.A. voraus, daß $\eta' < 0$ ist (Man benutze sonst $\Phi\eta$ mit $\Phi' < 0$, $\frac{1}{2} \leq \Phi \leq 1$). Das Ergebnis folgt jetzt daraus, daß die Bedingung $Q\mu(r) > 0$ mit $\mu'(r) = r\eta(r)$ und

$$c\mu > \eta(ax' - bx) + r\eta' \tag{10}$$

gleichbedeutend ist. Diese ist im vorliegenden Fall mit $\mu(r_1) = 1$ erfüllt, und man betrachtet $\alpha r^{2-m} + \beta\mu(r)$ wie früher.

Im Falle $m = 2$ folgt aus Zusatz 3, daß $M(r)$ für $r \geq r_1$ monoton fallend ist. Das führt zu einer Verbesserung von [3], Corollary 28 und Corollary 33, die ihrerseits eine Verbesserung der Sätze von Nagumo und Simoda, Akô und Kusano und Nehari liefern (s. [3]). Etwas überraschend ist die Tatsache, daß diese sieben Autoren scheinbar alle den einfachen Zugang zum Zusatz 3 mittels (10) übersehen haben.

LITERATUR

1. L. COLLATZ, Fehlerabschätzungen bei Randwertaufgaben partieller Differentialgleichungen mit unendlichem Grundgebiet, *Z. Angew. Math. Phys.* **9** (1958), 118–128.
2. N. MEYERS UND J. SERRIN, The exterior Dirichlet problem for second-order elliptic partial differential equations, *J. Math. Mech.* **9** (1960), 513–538.
3. J. PIEPENBRINK UND R. REDHEFFER, Nonlinear partial differential inequalities, *Arch. Rational Mech. Anal.* **36** (1970), 89–121.
4. R. REDHEFFER, Fehlerabschätzung bei nichtlinearen Differentialungleichungen mit Hilfe linearer Differentialungleichungen, erscheint in *Numer. Math.*